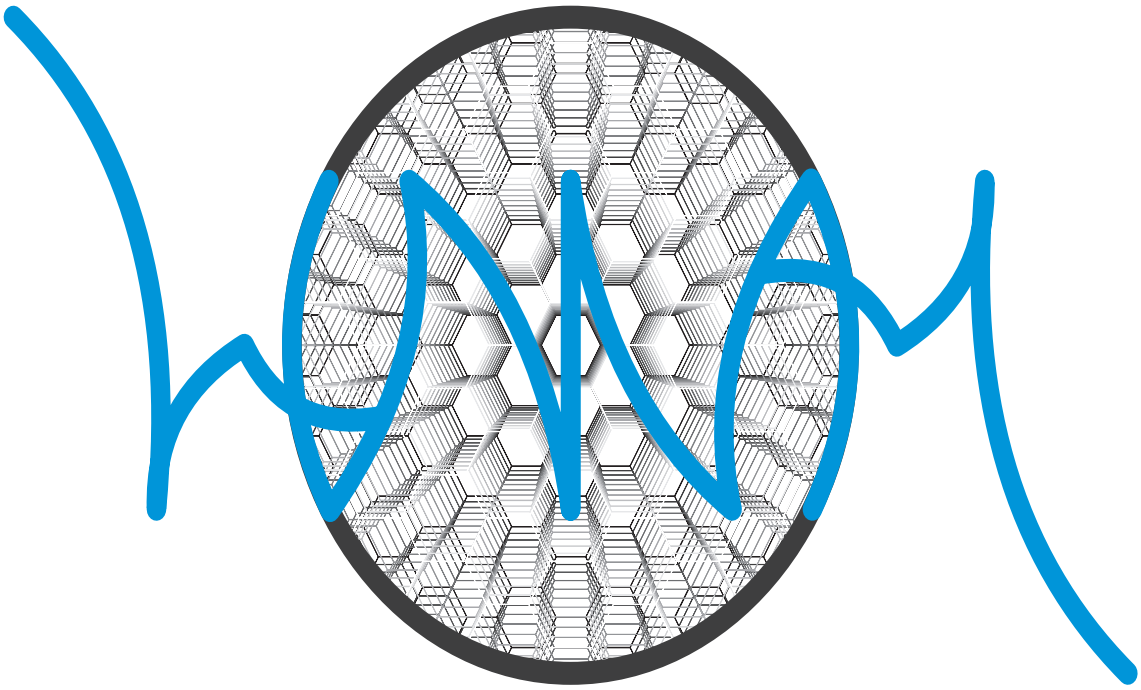
Workshop on Modern Applied Mathematics PK 2012

Kraków 23 — 24 November 2012

Warsztaty z Nowoczesnej Matematyki i jej Zastosowań

Kraków 23 — 24 listopada 2012



Contents

1 Introduction

Workshop on Modern Applied Mathematics PK 2012 is a conference on modern mathematics organized by the Institute of Mathematics of the Faculty of Physics, Mathematics and Computer Science, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology.

The Conference aims to present new results, to promote and to bring together researchers in the different research areas of mathematics and influence more cooperation among scientists working in mathematics. This conference will provide a unique forum for exchanging ideas and in-depth discussions on different aspects and different branches of mathematics.

We plan to organize similar conference every year.

You can find detailed information about conference on the page:

`www.wmam.pk.edu.pl`

I would like to thank all participants for interest in our conference and scientific research in the field of mathematics.

I would like to express my thanks to Board of Directors and the Administration of the Institute of Mathematics as well as the staff of the Institute for their friendliness and support for conference organization.

My special thanks go to dr Monika Herzog for the project and realization of the conference logo as well as Mr Konrad Koterla and Mr Krzysztof Konias for the website project and creation.

Grzegorz Gancarzewicz

Warsztaty z Nowoczesnej Matematyki i jej Zastosowań są konferencją organizowaną przez Instytut Matematyki na Wydziale Fizyki, Matematyki i Informatyki Politechniki Krakowskiej im. Tadeusza Kościuszki. Celem konferencji jest prezentacja aktualnych osiągnięć naukowych w zakresie matematyki i jej zastosowań, promocja matematyki i badań naukowych w tej dziedzinie,

spotkanie i wymiana doświadczeń przez naukowców zajmujących się różnymi działami matematyki.

Planujemy organizować co roku podobną konferencję.

Szczegółowe informacje o konferencji znajdują się na stronie:

`www.wmam.pk.edu.pl`

Bardzo dziękuję wszystkim uczestnikom za zainteresowanie konferencją i badaniami naukowymi w dziedzinie matematyki.

Chciałbym wyrazić szczególne podziękowania Dyrekcji Instytutu Matematyki, administracji Instytutu Matematyki i wszystkim pracownikom za życzliwość i pomoc w organizacji konferencji.

Dziękuje również Pani dr Monice Herzog za projekt i przygotowanie loga konferencji oraz Panu Konradowi Koterli i Panu Krzysztofowi Koniasowi za projekt i wykonanie portalu konferencji.

Grzegorz Gancarzewicz

1.1 Organizing Committee

dr Grzegorz Gancarzewicz — Chairman
dr Marcin Skrzyński

1.2 Scientific Committee

dr hab. Ludwik Byszewski, prof. PK — Chairman

prof. dr hab. Orest Artemowicz
prof. dr hab. Anatolij Pliczko

doc. dr hab. Piotr Jakóbczak
dr hab. Włodzimierz Jelonek
dr hab. inż. Anna Kumaniecka
dr hab. inż. Jacek Leśkow, prof. PK
dr hab. Teresa Winiarska, prof. PK

2 List of Participants

Orest Artemowicz, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: artemo@usk.pk.edu.pl

Magdalena Baczyńska, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland; e-mail: magdex-1987@wp.pl

Adam Bednarz, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: abednarz@pk.edu.pl

Katarzyna Bocheńska, Jagiellonian University, Institute of Mathematics, ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland

Katarzyna Bolek, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland; e-mail: katarzynabolek@10g.pl

Ludwik Byszewski, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: lbyszews@usk.pk.edu.pl

Dariusz Cichoń, Jagiellonian University, Institute of Mathematics, ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland;
e-mail: Dariusz.Cichon@im.uj.edu.pl

Sławomir Cynk, Jagiellonian University, Institute of Mathematics, ul. prof. Stanisława Łojasiewicza 6, 30-348 Kraków, Poland;
e-mail: Slawomir.Cynk@im.uj.edu.pl

Christiana Drake, University of California, Davis, Department of Statistics, One Shields Avenue, UC Davis, 4240 Mathematical Sciences Building, Davis, CA 95616; e-mail: cmdrake@ucdavis.edu

Dariusz Dudzik, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland;
e-mail: dariusz.dudzik@gmail.com

Elżbieta Gajecka-Mirek, State Higher Vocational School in Nowy Sącz, ul. Staszica 1, 33-300 Nowy Sącz, Poland; e-mail: egajecka@gmail.com

Grzegorz Gancarzewicz, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: gancarz@pk.edu.pl

Magdalena Grzech, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: magdag@pk.edu.pl

Monika Grzeżułkowska, Pomeranian University in Słupsk, ul. Arciszewskiego 22, 76-200 Słupsk, Poland; e-mail: monika.grzezulkowska@wp.pl

Jarosław Harezlak, Indiana University School of Medicine, Department of Biostatistics, 410 W 10th St., Suite 3000, Indianapolis, IN 46202; e-mail: harezlak@iupui.edu

Monika Herzog, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: mherzog@pk.edu.pl

Piotr Jakóbczak, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: jakobcza@pk.edu.pl

Włodzimierz Jelonek, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: wjelon@usk.pk.edu.pl

Mariusz Jużyniec, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: juzyniec@usk.pk.edu.pl

Oskar Knapik, Cracow University of Economics, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków; e-mail: knapiko@uek.krakow.pl

Beata Kocel-Cynk, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: bkocel@usk.pk.edu.pl

Jan Koroński, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: jkorons@usk.pk.edu.pl

Jarosław Kowalski, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland

Anna Kumaniecka, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: pukumani@cyf-kr.edu.pl

Madan Kundu, Indiana University School of Medicine, Department of Biostatistics, 410 W 10th St., Suite 3000, Indianapolis, IN 46202; e-mail: mgkundu@iupui.edu

Jacek Leśkow, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: jleskow@pk.edu.pl

Mateusz Matan, Comarch S.A., al. Jana Pawła II 41d, 31-864 Kraków, Poland; e-mail: mateuszmatan@gmail.com

Anna Milian, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: amilian@pk.edu.pl

Zbigniew Mrozek, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Faculty of Electrical and Computer Engineering, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: pemrozek@cyf-kr.edu.pl

Agnieszka Najberg, University of Lodz, Faculty of Mathematics and Computer Science, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź, Poland; e-mail: najbergagnieszka@gmail.com

Katarzyna Pałasińska, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: kpalasin@usk.pk.edu.pl

Artur Piękosz, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: apiekosz@pk.edu.pl

Anatolij Pliczko, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland

Szymon Pliś, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: splis@pk.edu.pl

Piotr Pokora, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland; e-mail: piotrpkr@gmail.com

Anatolij Prykarpatski, AGH University of Science and Technology, Faculty of Geology, Geophysics and Environment Protection, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Poland; e-mail: prykanat@agh.edu.pl

Jan Pudełko, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: jpudelko@usk.pk.edu.pl

Małgorzata Radoń, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland

Maria Samborska, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Faculty of Electrical and Computer Engineering, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: msamborska@pk.edu.pl

Lidia Skóra, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: lskora@usk.pk.edu.pl

Marcin Skrzyński, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: pfskrzyn@cyf-kr.edu.pl

Elżbieta Sowa, AGH University of Science and Technology, Faculty of Applied Mathematics, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, Poland; e-mail: esowa@agh.edu.pl

Bartosz Stawiarski, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: bstawiarski@pk.edu.pl

Izabela Stępniak, University of Lodz, Faculty of Mathematics and Computer Science, ul. Banacha 22, 90-238 Łódź, Poland; e-mail: izulka146@wp.pl

Tomasz Szemberg, Pedagogical University of Cracow, Institute of Mathematics, ul. Podchorążych 2, 30-084 Kraków, Poland;
e-mail: szemberg@up.krakow.pl

Eliza Wajch, Siedlce University of Natural Sciences and Humanities, Institute of Mathematics and Physics, ul. 3-go Maja 54, 08-110 Siedlce, Poland; e-mail: eliza.wajch@wp.pl

Margareta Wiciak, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: mwiciak@pk.edu.pl

Teresa Winiarska, Tadeusz Kościuszko Cracow University of Technology, Institute of Mathematics, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków, Poland; e-mail: twiniars@usk.pk.edu.pl

3 Abstracts

3.1
On residually finite groups

Orest D. Artemovych

Recall [1] that a group G is called *residually finite* if the intersection

$$\bigcap\{N \leq G \mid \text{ the index } |G:N| \text{ is finite}\} = 1$$

is trivial. An abelian group $(A, +)$ with a multiplication

$$* : A \times A \to A$$

is called *a brace* (see [2]) if the following are satisfied for all $a, b, c \in A$:

i) $(a + b) * c = (a * c) + (b * c)$,

ii) A is a group with respect to the circle operation "$\circ$" defined by the rule

$$a \circ b = a + b + (a * b).$$

The group $(A, \circ)$ is called *an adjoint group* of a brace A and denoted by A°. In the following theorem we construct an example of a mixed group in which every subgroup is either finite or of finite index.

Theorem 1. *The adjoint group $\mathbb{Z}^\circ$ of the integer numbers brace $(\mathbb{Z}, +, *)$ has the following properties:*

(1) $\mathbb{Z}^\circ = \langle 2\rangle \rtimes \langle 1\rangle$ *is a semidirect product of an infinite normal cyclic subgroup $\langle 2\rangle$ and a cyclic subgroup $\langle 1\rangle$ of order 2;*

(2) *the term of the lower central series $\gamma_k(\mathbb{Z}^\circ) = \langle 2^k\rangle$ is cyclic $(k \geq 2)$;*

(3) *every subgroup of* $\mathbb{Z}^\circ$ *is either finite or of finite index;*

(4) $\mathbb{Z}^\circ$ *is residually finite and residually nilpotent;*

(5) *the center* $Z(\mathbb{Z}^\circ)$ *is trivial;*

(6) $\mathbb{Z}^\circ = \langle 1, 3 \rangle$ *is generated by two involutions* 1 *and* 3.

We also study residually finite groups with every subgroup of infinite index to be finite. Remember that an infinite group with all nontrivial subgroups to be of finite index is cyclic (proof see in Yu. G. Fedorov [3] and J. Erdös [4]).

References

[1] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, Graduate Text in Math., 80, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1980.

[2] W. Rump, Braces, radical rings, and the quantum Yang-Baxter equations, J. Algebra. **307** (2007), 153–170.

[3] Yu. G. Fedorov, On infinite groups of which all nontrivial subgroups have a finite index (Russian). Uspehi Matem. Nauk (N.S.), **6** (1949), 187–189.

[4] J. Erdös, The theory of groups with finite classes of conjugate elements, Acta Math. Hung., **5** (1954), 45–58.

3.2
Some properties of Bernstein-Durrmeyer operators

Magdalena Baczyńska

Approximation issues appear in many branches of mathematics and they find a huge number of applications beyond mathematics. They originate in the celebrated Weierstrass Theorem to the effect that any continuous function on a compact interval can be uniformly approximated by polynomials. We refer to this procedure as an *algebraization of a function.*

Weierstrass Theorem is ineffective in the sense that it provides no algorithm for construction of approximating polynomials. This problem has been

taken on by Bernstein who constructed in 1912 for a given continuous function $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ a sequence of polynomials $B_n(f, x)$ converging uniformly to f

$$B_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

These polynomials are nowadays called *Bernstein polynomials.*

Slightly more generally, B_n's as functions of argument f can be viewed as linear operators from the space of continuous functions on $[a, b]$ to the space of polynomials in one variable of degree at most $n \in \mathbb{N}$.

In the course of time Bernstein operators have been modified and generalized, see eg. [2] and references therein. In particular one studies Bernstein-Durrmeyer type operators defines as follows, [1].

Definition 1. *Let $n \in \mathbb{N}$, $\rho > 0$ and f Lebesgue integrable function on $[0, 1]$. Define an operator U_n^ρ for $x \in [a, b]$ by*

$$U_n^\rho(f, x) = \sum_{k=0}^{n} F_{n,k}^\rho(f) \cdot p_{n,k}(x), \text{ where}$$

$$F_{n,k}^\rho = \begin{cases} f(0) & \text{for } k = 0, \\ \int_0^1 f(t) \cdot \mu_{n,k}^\rho(t) dt & \text{for } k = 1, 2, 3, ..., n-1, \\ f(1) & \text{for } k = n, \end{cases}$$

$$\mu_{n,k}^\rho(t) = \frac{t^{k \cdot \rho - 1}(1-t)^{(n-k) \cdot \rho - 1}}{B(k \cdot \rho, (n-k) \cdot \rho)},$$

and B is Euler beta function.

These operators are defined on the space of Lebesgue integrable functions which is considerably bigger than the space of continuous functions. Nevertheless these operators enjoy similar properties as Bernstein operators.

The following two theorems are main results presented here. The first one concerns the convergence of the $U_n(f)$ sequence.

Theorem 1. *For any f Lebesgue intagrable function on $[0, 1]$ a sequence $U_n^\rho(f)$ is converging uniformly to f.*

The second result is the verification that Voronovskaya type theorem holds for Bernstein-Durrmeier operators.

Theorem 2. *If f is continuous twice differentiable function in every $x \in [0,1]$, than we have*

$$\lim_{n\to\infty} n[U_n^\rho(f,x) - f(x)] = \frac{(\rho+1)f''(x)}{2\rho} \cdot x(1-x).$$

Detailed proofs of these results will be presented elsewhere.

References

[1] Durrmeyer J.-L.: Une formule d'inversion de la transformè de Laplace: Applications à la théorie des moments, Thèse de 3e cycle, Faculté des Sciences de l'Université de Paris, 1967

[2] Gonska, H., Păltănea, R.: Simultaneous approximation by a class of Bernstein-Durrmeyer operators preserving linear functions. Czechoslovak Math. J. 60(135) (2010), 783—799

3.3

Some Applications of Gröbner Bases

O zastosowaniu baz Gröbnera

Katarzyna Bolek

Celem mojego wystąpienia jest omówienie wybranych zastosowań teorii baz Gröbnera.

W moim referacie przedstawię rozwiązania układów równań wielomianowych za pomocą baz Gröbnera. Zaprezentuję rozwiązania dwóch zadań z Olimpiady Matematycznej. Ponadto przedstawię przykłady zastosowania eliminacji zmiennych za pomocą baz Grönera do znajdowania postaci algebraicznej równań krzywych oraz powierzchni. Opowiem o krzywej Béziera, którą zawsze otrzymujemy w postaci parametrycznej. Jako przykład powierzchni zaprezentuję powierzchnię noszącą nazwę parasol Whitney'a.

Bibliografia

[CLO] D. Cox, J. Little, D. O'Shea, *Ideals, Varietes and Algorithms: : An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Springer, New York, 2007, 1 – 137.

[DW] M. Dumnicki, T. Winiarski, *Bazy Gröbnera*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Padagogicznego, Kraków, 2009.

[Gib] C. G. Gibson, *Elementary Geometry of Algebraic Curves: an Undergraduate Introduction*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998, 1 – 10.

[OM] Strona http:// www.om.edu.pl/

3.4

Criteria for normality via C_0-semigroups and moment sequences

Dariusz Cichoń

This talk is based on the paper

D. Cichoń, I. B. Jung, J. Stochel, Generalized Friedland's theorem for C_0-semigroups, *J. Math. Anal. Appl.* **343** (2008), 752-757

We are going to discuss the following two theorems.

Theorem 1. *Suppose that A is the infinitesimal generator of a C_0-semigroup $\{S(t)\}_{t\in[0,\infty)} \subseteq \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) A is normal,

(ii) for every $h \in \mathcal{H}$ the functions $t \mapsto \log \|S(t)h\|$ and $t \mapsto \log \|S(t)^*h\|$ are convex on $[0,\infty)$,

(iii) for every $h \in \mathcal{H}$ there exists $\varepsilon_h \in (0,\infty)$ such that the functions $t \mapsto \log \|S(t)h\|$ and $t \mapsto \log \|S(t)^*h\|$ are convex on $[0,\varepsilon_h)$.

Moreover, if A is normal, then $\mathcal{N}(S(t)) = \mathcal{N}(S(t)^*) = \{0\}$ for all $t \in [0, \infty)$.

Theorem 2. *An operator $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ is normal if and only if the kernels $\mathcal{N}(A)$ and $\mathcal{N}(A^*)$ coincide and for some integers $j, k \geq 1$ (equivalently: for all integers $j, k \geq 1$) the sequence $\{\|A^n h\|^{2j}\}_{n=0}^{\infty}$ as well as $\{\|A^{*n} h\|^{2k}\}_{n=0}^{\infty}$ is a Hamburger moment sequence for every $h \in \mathcal{H}$.*

3.5
Picard–Fuchs operator for certain one parameter families of Calabi–Yau threefolds

Sławomir Cynk
Joint work with Duco van Straten (Mainz, Germany).

In the talk I will present computation of the Picard–Fuchs operator for certain one–parameter families of Calabi–Yau threefolds.

Definition 1. Calabi–Yau manifold *is a complex, projective (kähler) manifold X of dimension 3 satisfying*

- $K_X = \mathcal{O}_X$
- $H^1(\mathcal{O}_X) = 0$.

Let $\mathcal{X} :\longrightarrow \mathbb{P}^1$ be an algebraic family such that a generic fiber is a smooth Calabi–Yau threefold with the third Betti number equal $b_3(\mathcal{X}_t) = 4$, then the period function $f_t := \int_\gamma \Omega_t$ (where γ is a 3–cycle in $\mathcal{X}_t$ and Ω_t is a nowhere vanishing 3–form on $\mathcal{X}_t$) satisfies certain linear equation of order 4 called the Picard–Fuchs equation. Motivation to study Picard–Fuchs operator for one parameter families of Calabi–Yau threefolds come both from mathematics and physics.

Any singular fiber of the family $\mathcal{X}$ yields singular point of the Picard–Fuchs operator, however it may happend that a singularity of the operator corresponds to a smooth point of the family (the so called apparent singularity). A singular point is called a maximal unipotent monodromy point (a MUM–point) if the monodromy operator at this point has a single Jordan block of maximal size: this points are specially interesting from the point of view of physics.

We shall present the method to compute the Picard–Fuchs operator for certains one parameter families of double octics ([3]) and discuss three examples corresponding to arrangements no. 36, 70 and 254 demonstrating completely different properties:

36 is a quadratic pullback of an operator with one point of maximal unipotent monodromy (so–called MUM point) and one conifold point.

70 no MUM–point,

254 nine singularities of the operator: three conifold points, three apparent singularities and three MUM–points.

References

[1] G. Almkvist, W. Zudilin, *Differential equations, mirror maps and zeta values*. Mirror symmetry. V, 481–515, AMS/IP Stud. Adv. Math., 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.

[2] G. Almkvist, C. van Enckevort, D. van Straten, W. Zudilin, *Tables of Calabi-Yau operators*, arXiv:math/0507430.

[3] C. Meyer, *Modular Calabi-Yau threefolds*, Fields Institute Monographs, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

3.6
Inference with Missing data

Christiana Drake

Observational studies and to a lesser degree randomized experiments often are confronted with missing data. The validity of inference depends on the missingness mechanism [Little J.A, and Rubin, D.B., 2002]. When the missing data mechanism depends on observed data only, estimation of means and/or regression coefficients requires adjustment but no further information. If the missingness mechanism depends on unobserved data, unbiased estimation requires further information. Multiple imputation [Rubin, D.B. 1987] complete data sets by imputing the missing values and leads to standard statistical analysis. Likelihood based inference distinguishes between data missing at random (MAR) where inference is based on the observed data likelihood and data not missing at random (NMAR) where the joint distribution of the data and missingness mechanism is modelled. Estimation in this case cannot be based on the observed data alone. The concepts will be illustrated with examples from survey sampling and time series analysis. The time series application is joint work with Oskar Knapik and Jacek Leśkow.

3.7

An outer measure on a commutative ring Pewna miara zewnętrzna na pierścieniu przemiennym

Dariusz Dudzik

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z jedynką i niech $\mathfrak{P}$ będzie taką rodziną ideałów pierwszych pierścienia R, że $\bigcup \mathfrak{P} = R \setminus R^{\times}$. Przypuśćmy, że dana jest miara nieujemna (albo miara zewnętrzna) μ na zbiorze $\mathfrak{P}$. W referacie skonstruujemy za pomocą miary μ pewną miarę zewnętrzną μ^* na pierścieniu R, udowodnimy interesującą własność miary μ^* i przedstawimy kilka naturalnych przykładów.

Bibliografia

[1] S. Balcerzyk, T. Józefiak, *Pierścienie przemienne*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1985.

[2] H. Federer, *Geometric measure theory*, Springer-Verlag, New York, 1969.

3.8

Resampling methods for weakly dependent sequences

Elżbieta Gajecka-Mirek

In 1999 a new type of dependence in time series - weak dependence was introduced (*Bickel* and *Bühlmann* and simultaneously *Doukhan* and *Louhichi*). This gives the tools for the analysis of statistical procedures with very general data generating processes.

In the presentation there are considered resampling methods to estimate the moments. One of them, the subsampling, is used to approximate an asymptotic distribution of a self-normalized sample mean

$$T_n = \frac{\sqrt{n}(\overline{X} - \eta)}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(X_t - \overline{X})^2 + \widehat{LM}(\rho)}}$$

and create the subsampling-based confidence intervals for the stationary, long memory and heavy-tailed model introduced by Politis and McElroy $\{X_t\}_{t\in\mathbb{Z}}$: $X_t = \sigma_t G_t + \eta$.
The methodology is applied to the series of packet-counts from Ethernet traffic traces.

3.9
Graphs with path systems of length k in a hamiltonian cycle

Grzegorz Gancarzewicz

We consider only finite graphs without loops and multiple edges. By $\mathrm{V}(G)$ and $\mathrm{E}(G)$ we denote respectively the vertex set of graph G and the edge set of G. By $\mathrm{d}(x, G)$ or $\mathrm{d}(x)$ we denote *the degree of a vertex x in the graph G* and by $\mathrm{d}(x, y)$ or $\mathrm{d}_G(x, y)$ *the distance between x and y in G.*

Let $k, s_1, \ldots s_l$ be positive integers. We call S *a path system of length k* if the connected components of S are paths:

$$\begin{array}{ll} P^1: & x_0^1 x_1^1 \ldots x_{s_1}^1, \\ & \vdots \\ P^l: & x_0^l x_1^l \ldots x_{s_l}^l \end{array}$$

and $\sum_{i=1}^{l} s_i = k$.

Let S be a path system of length k and let $x \in \mathrm{V}(S)$. We shall call x *an internal vertex* if x is an internal vertex in one of the paths $P^1, \ldots, P^l$.

If q denotes the number of internal vertices in a path system S of length k then $0 \leqslant q \leqslant k-1$. If $q = 0$ then S is *a k-matching* (i.e. a set of k independent edges).

We characterize for every $k \geqslant 1$ all $(l+3)$-connected graphs G on $n \geqslant 3$ vertices satisfying:

$$\mathrm{d}_G(x, y) = 2 \;\Rightarrow\; \max\{\mathrm{d}(x, G), \mathrm{d}(y, G)\} \geqslant \frac{n+k}{2}$$

for each pair of vertices x and y in G, such that there is a path system S of length k with l internal vertices such that S is not contained in any hamiltonian cycle of G.

3.10

Hausdorff gaps and automorphisms of $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$

Luki Hausdorffa i rozszerzanie automorfizmów $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$

Magdalena Grzech

Symbol $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$ oznacza algebrę ilorazową Boole'a otrzymaną przez podzielenie zbioru potęgowego $\mathbb{N}$ przez ideał podzbiorów skończonych fin. Przestrzenią Stone'a tej algebry jest $\mathbb{N}^\star$ czyli narost uzwarcenia Čecha-Stone'a przeliczalnej przestrzeni dyskretnej. Zatem każdy automorfizm algebry wyznacza i jest wyznaczany przez autohomeomorfizm przestrzeni topologicznej $\mathbb{N}^\star$. Naturalne jest pytanie o moc i strukturę grupy automorfizmów $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$. Ponieważ każda prawie permutacja (czyli bijekcja z dopełnienia skończonego podzbioru $\mathbb{N}$ w dopełnienie skończonego podzbioru $\mathbb{N}$) wyznacza automorfizm $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$ (tzw. *automorfizm trywialny*), zatem moc tej grupy jest nie mniejsza niż *continuum* ($\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$). Z drugiej strony, nie przekracza $2^{\mathfrak{c}}$. W. Rudin wykazał, że przy założeniu CH (*The Continuum Hipothesis*) moc tej grupy jest równa $2^{\aleph_1}$ zatem możliwie największa ([W]). S. Shelah, korzystając z forsingu, skonstruował model teorii mnogości, w którym każdy automorfizm $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$ jest trywialny ([S1]). Forsing użyty w tej pracy został wykorzystany przez S. Shelaha i J. Stepransa do wykazania, że również przy założeniu negacji CH i aksjomatu PFA (*The Proper Forcing Axiom*), każdy automorfizm jest trywialny ([S2]). Teza ta jest prawdziwa również przy założeniu OCA (*The Open Coloring Axiom*) i $\mathrm{AM}_{\aleph_1}$ (*The Martin Axiom*($\aleph_1$)).

Można pokazać ([G]), że rozważana grupa automorfizmów może być prawie dowolna: Dla dowolnie dużej liczby kardynalnej κ i dowolnej algebry Boole'a B mocy nie mniejszej niż κ i nie większej niż 2^κ istnieje model, w którym *continuum* jest równe κ, grupa automorfizmów B jest izomorficzna z podgrupą $\mathcal{P}_B$ grupy automorfizmów $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$ oraz każdy automorfizm $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$ można przedstawić jako złożenie automorfizmów trywialnych z elementami $\mathcal{P}_B$.

Pojawia się pytanie: które automorfizmy modelu wyjściowego zostaną wyeliminowane po zastosowaniu forsingu (bez nieprzeliczalnych antyłańcuchów), które zostaną zachowane, w szczególności pojawi się prawie permutacja, która je trywializuje? Pomocne w poszukiwaniu odpowiedzi na to pytanie jest pojęcie luki Hausdorffa. Głównym wynikiem, który zostanie przedstawiony, jest następujące twierdzenie:

Jeżeli obrazem, przez (nietrywialny) automorfizm T, luki Hausdorffa jest luka Haudorffa, to istnieje forsing (bez nieprzeliczalnych antyłańcuchów) dodający prawie permutację lokalnie trywializującą T.

Bibliografia

[[G] a M. Grzech *The group of automorphisms of* $\mathcal{P}(\omega)/\mathsf{fin}$, w recenzji.

[[R] a W. Rudin *Homogenity problems in the theory of Čech compactification*, Duke Mathematical Journal, vol. 23 (1956), pp. 409-419

[[S1] a S. Shelah *Proper Forcing*, Lecture Notes in Mathematics 940, Springer Verlag, Berlin 1982

[[S2] a J. Steprans, S. Shelah *PFA implies all automorphisms are trivial*, Proceedings of the American Mathemaical Society, vol. 104 (1988), no. 4, pp. 1220-1225

[[V] a B. Velickovic *OCA and automorphisms of* $\mathcal{P}(\mathbb{N})/\mathsf{fin}$, Topology and its Applications, vol. 49 (1993), pp. 1-13

3.11

Functional Regression Models with Structured Penalties

Jarosław Harezlak, Madan Kundu

Collection of functional data has become more prevalent in the past decade, including functional data collected longitudinally. For example, in the HIV Neuroimaging Consortium (HIVNC) study, magnetic resonance spectroscopy (MRS) was used to collect metabolite spectra from multiple brain regions at a number of time points. Analysis of such data usually follows a two-step procedure: metabolite concentration extraction and regression modeling. Our approach does not rely on the frequently unreliable feature extraction. Instead, it uses scientific knowledge to estimate regression function without explicitly estimating the feature characteristics. Specifically, we will present a method, partially empirical eigenvectors for regression (PEER), which balances in a principled way the information arising from the observed data and the a-priori scientific knowledge. In the second part of the

talk, we will extend our method to functional linear model estimation in the longitudinal data setting. Our method allows the regression function to vary across both time and space. We derive the estimator's statistical properties and discuss their connections with the generalized singular value decomposition (GSVD). The results of the simulation studies and an application to the analysis of HIV patients' neurocognitive impairment as a function of MRS data will be presented.

References

[1] Harezlak, J., Buchthal, S., Taylor, M., Schifitto, G., Zhong, J., Daar, E., Alger, J., Singer, E., Campbell, T., Yiannoutsos, C. and Navia, B. (2011). Persistence of HIV-associated cognitive impairment, inflammation, and neuronal injury in era of highly active antiretroviral treatment. AIDS 25, 625-633.

[2] Randolph, T., Harezlak, J. and Feng, Z. (2012). Structured penalties for functional linear models - partially empirical eigenvectors for regression. Electronic Journal of Statistics 6, 323-353.

[3] Kundu, Madan G.; Harezlak, Jaroslaw; and Randolph, Timothy W., "LONGITUDINAL FUNCTIONAL MODELS WITH STRUCTURED PENALTIES" (November 2012). Johns Hopkins University, Dept. of Biostatistics Working Papers. Working Paper 248. http://biostats.bepress.com/jhubiostat/paper248

3.12

Approximation of function of two variables from exponential weight spaces

Monika Herzog

2000 Mathematics Subject Classifcation. 41A36. Key words and phrases: linear positive operators, Bessel function, modulus of continuity, degree of approximation

In the paper we study approximative properties of modified Szasz-Mirakyan operators for functions of two variables from exponential weight spaces. We

present theorems giving a degree of approximation by these operators for exponential bounded functions.

Let $C(\mathbb{R}_0^2)$ be the set of all real-valued functions continuous on $\mathbb{R}_0^2 = [0,+\infty)^2$. Similarly as in [1] we define the exponential weight space

$$E_{p,q} = \{f \in C(\mathbb{R}_0^2) : w_{p,q}\, f \text{ is uniformly continuous and bounded on } \mathbb{R}_0^2\},$$

where $w_{p,q}$ is the exponential weight function defined as follows

$$w_{p,q}(x,y) = \exp -(px+qy), \quad p,q \in \mathbb{R}_+,$$

for $(x,y) \in \mathbb{R}_0^2$. The space $E_{p,q}$ is a normed space with the norm

$$\|f\|_{p,q} = \sup\{w_{p,q}(x,y)|f(x,y)|; (x,y) \in \mathbb{R}_0^2\}.$$

Moreover, we consider the modulus of continuity

$$\omega(f, E_{p,q}; t, s) = \sup\{\|\Delta_{h,d} f\|_{p,q}; h \in [0,t], d \in [0,s]\},$$

where

$$\Delta_{h,d} f(x,y) = f(x+h, y+d) - f(x,y)$$

for $(x,y) \in \mathbb{R}_0^2$, $h, d \in \mathbb{R}_0$.

We introduce the modified Szasz-Mirakyan operator for functions $f \in E_{p,q}$ in the following way

$$A_{n,m}^{\nu,\mu}(f;x,y) =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{I_\nu(nx)} \frac{1}{I_\mu(my)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{nx}{2})^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} \frac{(\frac{my}{2})^{2j+\mu}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\mu+1)} f(\frac{2k}{n+p}, \frac{2j}{m+q}), & x>0,\ y>0; \\ \frac{1}{I_\nu(nx)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{nx}{2})^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)} f(\frac{2k}{n+p}, 0), & x>0,\ y=0; \\ \frac{1}{I_\mu(mx)} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\frac{mx}{2})^{2j+\nu}}{\Gamma(j+1)\Gamma(j+\mu+1)} f(0, \frac{2j}{m+q}), & y>0,\ x=0; \\ f(0,0), & x=y=0. \end{cases}$$

where $\nu, \mu \in \mathbb{R}_0$, $n, m \in \mathbb{N}$, Γ is the Euler-gamma function and I_ν the modified Bessel function defined by the formula ([6], p. 77)

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2k+\nu}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+\nu+1)}.$$

The following theorem estimate a weighted error of approximation for functions belonging to the space $E_{p,q}^1 = \{f \in E_{p,q} : f' \in E_{p,q}\}$.

Theorem 1. *For all $p, q \in \mathbb{R}_+$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}_0$ and for each function $g \in E^1_{p,q}$ there exists a positive constant $M(p, q, \nu, \mu)$ such that for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2_0$ and $n, m \in \mathbb{N}$ we have*

$$w_{p,q}(x, y)|A^{\nu,\mu}_{n,m}(g; x, y) - g(x, y)| \leq$$

$$M(p, q, \nu, \mu)\left(\|g'_x\|_{p,q}\frac{x+1}{\sqrt{n}} + \|g'_y\|_{p,q}\frac{y+1}{\sqrt{m}}\right).$$

The next theorems give a degree of approximation of functions by operators $A^{\nu,\mu}_{n,m}$.

Theorem 2. *For all $p, q \in \mathbb{R}_+$, $\nu, \mu \in \mathbb{R}_0$ and for each $f \in E_{p,q}$ there exists a positive constant $M(p, q, \nu, \mu)$ such that for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2_0$ and $n, m \in \mathbb{N}$ we have*

$$w_{p,q}(x, y)|A^{\nu,\mu}_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq M(p, q, \nu, \mu)\omega\left(f, E_{p,q}, \frac{x+1}{\sqrt{n}}, \frac{y+1}{\sqrt{m}}\right).$$

The above theorem implies the following corollaries.

Corollary 1. *If $\nu, \mu \in \mathbb{R}_0$ and $f \in E_{p,q}$ with some $p, q \in \mathbb{R}_+$, then for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2_0$*

$$\lim_{n,m\to\infty} A^{\nu,\mu}_{n,m}(f; x, y) = f(x, y).$$

Moreover, the above convergence is uniform on every set $[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ with $0 \leq x_1 < x_2$, $0 \leq y_1 < y_2$.

Corollary 2. *For all $\alpha, \beta \in (0; 1]$, $p, q \in \mathbb{R}_+$ and for each $f \in \mathrm{Lip}(\mathrm{E_{p,q}}, \alpha, \beta)) = \{\mathrm{f} \in \mathrm{E_{p,q}} : \omega(\mathrm{f}, \mathrm{E_{p,q}}; \mathrm{t}, \mathrm{s}) = \mathrm{O}(\mathrm{t}^\alpha + \mathrm{s}^\beta), \mathrm{t}, \mathrm{s} \to 0^+\}$ there exists a positive constant $M(p, q, \alpha, \beta)$ such that for all $(x, y) \in \mathbb{R}^2_0$ and $n, m \in \mathbb{N}$ we have*

$$w_{p,q}(x, y)|A^{\nu,\mu}_{n,m}(f; x, y) - f(x, y)| \leq M(p, q, \alpha, \beta)\left(\left(\frac{x+1}{\sqrt{n}}\right)^\alpha + \left(\frac{y+1}{\sqrt{m}}\right)^\beta\right).$$

References

[1] M. Herzog, *Approximation of function from exponential weight spaces by operators of Szasz-Mirakyan type*, Comment. Math. **43.1** (2003), 77-94.

[2] M. Herzog, *Approximaton of function of two variables by modified Szasz-Mirakyan operators*, Comment. Math. 52.1 (2012), 3-9.

[3] L. Rempulska, M. Skorupka, *On some operators in weighted spaces of functions of two variables*, Ricerche Mat. **48.1** (1999), 1-20.

[4] E. Wachnicki, *Approximation by bivariate Mazhar-Totik operators*, Comment. Math. **50.2** (2010), 141-153.

[5] Z. Walczak, *On certain modified Szasz-Mirakjan operators for functions of two variables*, Demonstratio Math. **33.1** (2000), 91-100.

[6] G. N. Watson, *Theory of Bessel functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966

3.13

The existence of a weak solution of the semilinear first-order differential equation in a Banach space

Mariusz Jużyniec

Introduction. We consider the abstract first-order initial value problem

$$\frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t, u(t)) \quad \text{for} \quad t \in (0, T], \tag{1}$$

$$u(0) = x.$$

where A is a densely defined, closed linear operator on a Banach space X, $x \in X$ and $f : [0, T] \times X \to X$. For a Banach space X, X^* will denote its dual space. Let $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X^* \longrightarrow \mathbb{K}$ be the duality pairing. For an operator A, $D(A)$ and A^* will denote its domain and adjoint, respectively.

Definition 1. A function $u \in C([0, T];\ X)$ is a weak solution of (1) on $[0, T]$ if and only if for every $v \in D(A^*)$ the function $[0, T] \ni t \to \langle u(t), v\rangle$ is absolutely continuous on $[0, T]$ and

$$\frac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle = \langle u(t), A^*v\rangle + \langle f(t, u(t)), v\rangle \ a.e. \text{ on } [0, T].$$

Theorem 1. Let A be the infinitesimal generator of a C_0 semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ of bounded linear operators on X, $u \in C([0, T];\ X)$

and $f(\cdot, u(\cdot)) \in L^1(0,T;\ X)$. If u is a weak solution of the equation (1) and $u(0) = x$ then u is a solution of the integral equation

$$u(t) = T(t)x + \int_0^t T(t-s)f(s,u(s))ds \quad t \in [0,T].$$

Theorem 2. Let $f : [0,T] \times X \to X$ be continuous in t in $[0,T]$ and uniformly Lipschitz continuous on X. If A is the infinitesimal generator of a C_0 semigroup $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ of bounded linear operators on X then for every $x \in X$ integral equation (3) has a unique solution $u \in C([0,T];\ X)$.

The purpose of this note is to establish an equivalence between functions u satis-fying (3) and weak solutions of (1).

Theorem 3. Let the assumptions of Theorem 2. be fulfilled then there exists for each $x \in X$ a unique weak solution u of (1) satisfying $u(0) = x$.

References

[1] Ball J.M. *Strongly continuous semigroups, weak solutions, and the variation of constant formula* Proc. Amer. Math. Soc. 1977 370—373

[2] Juzyniec M. *Weak solutions of evolution equations with parameter* 1997 Univ. Iagel. Acta Math. 189—204

[3] Pazy A. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations* Springer-Verlag 1983

[4] Winiarska T. *Differentiability equations with parameter* Technikal University of Cracow 1988

3.14
Bayesian inference for cyclostationary time series

Oskar Knapik

In recent years, there is a growing interest in modelling nonstationary time series. Periodically correlated, almost periodically correlated, cyclostationary time series and stochastic processes form important examples of such nonstationary models. The survey of Gardner, Napolitano, Paura (2006) is

quoting over 1500 different papers recently published that are dedicated to cyclostationarity. Almost periodically correlated (APC) time series have found applications in various areas like: econometrics, signal processing, communications and biology. The purpose of this paper is to provide Bayesian inference for such signals within parametric statistical model. The inference based on the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) methods. In particular we propose to use the hybrid algorithm which is Gibbs sampler with one step on the basis of Metropolis-Hastings algorithm to conduct Bayesian inference for unknown quantities of the model. The whole is complemented with simulations.

3.15
Hausdorff limit in o-minimal structures
Granica Hausdorffa w strukturach o–minimalnych

Beata Kocel–Cynk

Wspólna praca z W. Pawłuckim i A. Valette.

Pojęcie struktury o–minimalnej zostało wprowadzone do geometrii algebraicznej rzeczywistej na początku lat osiemdziesiątych jako próba aksjomatycznego ujęcia własności zbiorów semialgebraicznych. Ten sam zestaw aksjomatów pozwala również na wyprowadzenie podstawowych własności zbiorów globalnie subanalitycznych. Zainteresowanie tematyką struktur o–minimalnych gwałtownie rośnie od początku lat 90 głównie za sprawą dowodu Wilkiego o–minimalności rozszerzenia ciała liczb rzeczywistych o funkcję wykładniczą.

Definicja 1. Struktura $\mathcal{S}$ na $\mathbb{R}$ *jest to ciąg* $\{\mathcal{S}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *taki, że dla dowolnej liczby naturalnej* n

1. $\mathcal{S}_n$ *jest algebrą boole'owską podzbiorów* $\mathbb{R}^n$,
2. $\mathcal{S}_n$ *zawiera przekątne* $\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_i = x_i\}$ *dla* $1\le i<j\le n$,
3. *jeśli* $A\in\mathcal{S}_n$, *to* $A\times\mathbb{R}$ *oraz* $\mathbb{R}\times A$ *należą do* $\mathcal{S}_{n+1}$,
4. *jeśli* $A\in\mathcal{S}_{n+1}$, *to* $\pi(A)\in\mathcal{S}_n$, *gdzie* $\pi:\mathbb{R}^{n+1}\longrightarrow\mathbb{R}^n$ *jest rzutowaniem na pierwszych* n *współrzędnych.*

Definicja 2. *Mówimy, że zbiór* $A \subset \mathbb{R}^n$ *jest* definiowalny *jeśli* $A \in \mathcal{S}_n$. *Funkcję* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$, *określoną na zbiorze* $A \subset \mathbb{R}^n$, *nazywamy* definiowalną *jeśli jej wykres jest definiowalny.*

Definicja 3. *Struktura* $\mathcal{S}$ *na* $\mathbb{R}$ *jest* o–minimalna *jeśli spełnia następujące warunki*

1. $\{(x, y) : x < y\} \in \mathcal{S}_2$ *oraz* $\{a\} \in \mathcal{S}_1$ *dla każdego* $a \in \mathbb{R}$,
2. *każdy zbiór należący do* $\mathcal{S}_1$ *jest skończoną sumą przedziałów* (a, b), $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ *oraz punktów* $\{a\}$.

Celem referatu jest przedstawienie następującego twierdzenia o definiowalności granicy Hausdorffa definiowalnej rodziny w strukturze o–minimalnej oraz podstawowych elementów jego dowodu.

Twierdzenie 1. *Niech* T *będzie ograniczonym podzbiorem definiowalnym przestrzeni* $\mathbb{R}^k$ *i niech* A *będzie ograniczonym podzbiorem definiowalnym* $\mathbb{R}^n \times T$ *takim, że wszystkie włókna*

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : (x, t) \in A\} \quad (t \in T)$$

są niepustymi podzbiorami zwartymi $\mathbb{R}^n$ *oraz* $C = \lim_{\nu \mapsto \infty} A_{t_\nu}$ *jest granicą pewnego ciągu* A_{t_ν} $(\nu \in \mathbb{N})$, *gdzie* $\lim_{\nu \mapsto \infty} t_\nu = t_*$ $(\in \bar{T})$.

Wtedy C *jest definiowalny oraz istnieje łuk definiowalny* $\gamma : (0, 1] \longrightarrow T$ *taki, że* $\lim_{\tau \mapsto 0} \gamma(t) = t_*$ *oraz* $C = \lim_{\tau \mapsto 0} A_{\gamma(\tau)}$.

Twierdzenie to zostało po udowodnione przez Liona i Speisseggera ([2]), w pracy ([1]) podaliśmy, krótki i całkowicie geometryczny dowód tego faktu oparty na rozkładzie z parametrem zbioru definiowalnego na sumę komórek Lispchitzowskich.

Bibliografia

[1] B. Kocel–Cynk, W. Pawłucki, A Valette, *A short geometric proof that Hausdorff limits are definable in any o–minimal structure*, *zgłoszona do druku.*

[2] J.-M. Lion, P. Speissegger, *A geometric proof of the definability of Hausdorff limits.* Selecta Math. (N.S.) 10 (2004), no. 3, 377–390.

3.16
Resampling methods for nonstationary time series

Jacek Leśkow

In this work we investigate various resampling methods essential in the statistical inference for nonstationary time series. We introduce the concept of almost periodically correlated stochastic process and time series (see e.g. Antoni (2009), Gardner et al (2006) and Hurd(1991)). We show its main characteristics in the time and frequency domain and we propose new approach in statistical inference based on subsampling or bootstrap. In the time domain, we focus on the problem of estimating the Fourier coefficients of the autocovariance of underlying time series or stochastic process while in the frequency domain the main point is identification of frequencies characterizing the spectral bimeasure. Various applications, ranging from financial data to mechanical and biological data are also considered .
The presentation will extend the results included in Cioch, Knapik and Leśkow (2013), Leśkow (2012), Leśkow and Mokrzycka (2011), Leśkow and Synowiecki (2009) and Lenart, Leśkow and Synowiecki (2008).

3.17
Surface shape analysis algorithms of 3D objects in biomedical engineering
Algorytmy analizy kształtu powierzchni obiektów 3D w inżynierii biomedycznej

Mateusz Matan

Algorytmy analizy kształtu powierzchni obiektów 3D w inżynierii biomedycznej Potrzeba zastosowania algorytmów analizy kształtu powierzchni obiektów 3D wynika bezpośrednio z chęci zautomatyzowania rzeczywistych zadań, bazujących na obszernej wiedzy dziedzinowej, w różnych zagadnieniach medycyny, inżynierii biomedycznej czy fizyki. Analiza kształtu stosowana

w inżynierii biomedycznej opiera się w głównej mierze na algorytmach z dziedziny geometrii obliczeniowej [1], wspomaganych algorytmami przetwarzania grafiki komputerowej. Złożoność i nieregularność rzeczywistych struktur (takich jak np. obrazy 3D zębów czy kości) jest jednak znaczną przeszkodą w efektywnym – zarówno pod względem czasowym, jak i jakościowym – przetwarzaniu i późniejszej obróbce danych pochodzących z pomiarów. Jednym z możliwych zastosowań algorytmów detekcji kształtu jest rozwiązanie problemu lokalizacji ubytków na trójwymiarowym obrazie zęba wykonanym za pomocą mikrotomografu [4]. W celu umożliwienia analizy rzeczywistych danych należy stworzyć model matematyczny, który będzie opisywał kształt rzeczywistego obiektu w sposób ścisły, z możliwie najmniejszym błędem. Rozkład obiektu na obszary wypukłe pozwala znacznie przyspieszyć i uprościć dalsze etapy przetwarzania. Z praktycznego punktu widzenia rozkład obiektu na obszary wypukłe (ECD – Exact Convex Decomposition) daje relatywnie zbyt dużą liczbę zbiorów, co znacznie utrudnia dalsze przetwarzanie [2]. Wprowadzenie pewnych ograniczeń pozwala zredukować liczbę nieistotnych detali, ale obniża jakość rozkładu i późniejszej obróbki [3]. Podczas prezentacji zostaną przedstawione trzy algorytmy (przyrostowy, QuickHull oraz GiftWrap), które dają rozkład obiektu na obszary w przybliżeniu wypukłe (ACD – Approximate Convex Decomposition), wykorzystując metodę otoczki wypukłej.

Bibliografia

[1] Gunilla Borgefors, Gabriella Sanniti di Baja, Analyzing Nonconvex 2D and 3D Patterns, Computer Vision And Image Understanding, Vol. 63, No. 1, pp. 145–157, January 1996.

[2] Jyh-Ming Lien, Approximate convex decomposition and its applications (PhD dissertation), Texas A&M University, December 2006.

[3] Luca Serino, Gabriella Sanniti di Baja, Carlo Arcelli, Object decomposition via curvilinear skeleton partition, Istituto di Cibernetica "E. Caianiello", CNR Pozzuoli, Naples, Italy, 2010.

[4] Rafał Petryniak, Zbisław Tabor, Anna Kierklo, Małgorzata Jaworska, Detection of voids of dental root canal obturation using micro-CT, Computer Vision and Graphics, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 7594, pp. 549–556, Springer, Berlin – Heidelberg, 2012.

3.18
On Some Stochastic Perturbations of Semilinear Evolution Equations

Anna Milian

We consider semilinear evolution equations with some locally Lipschitz nonlinearities, perturbed by Banach space valued, continuous and adapted stochastic process. We show that under some assumptions there exists a solution to the equation. Using the result we show that there exists a mild, continuous, global solution to a semilinear Ito equation with locally Lipschitz nonlinearities. An example of the equation is given.

References

[1] Milian,A. On Some Stochastic Perturbations of Semilinear Evolution Equa- tions, Canad.Math.Bull.Vol. 53(3), 2010, pp. 526-533

3.19
Teaching ode with MATLAB and Simulink, tips and tricks

Zbigniew Mrozek

MATLAB® is a general high level programming language and programming environment. It is user friendly and integrates reliable algorithms of applied mathematics and numerous expansion modules (toolbox library, Simulink with blockset library and many others), focused on specific fields of applications. MATLAB enables to easily solve a variety of problems science, industry, medicine, economy and many other areas – by facilitating access to efficient computational algorithms and the ability to visualize results of computation.

MATLAB successfully replaces universal programming languages (Fortran, C, C#, C++) in the area of scientific and technical calculations. Professional graphics and math library is based on optimized libraries: **LAPACK** (*Linear Algebra Package*) and **BLAS** (*Basic Linear Algebra Subroutines*).

Solving ODE using MATLAB, Simulink and Symbolic Math Toolbox

Graphical modeling of ODE (*Ordinary Differential Equations*) in Simulink is the easiest way to get numerical solution and plot of ODE initial problem. You do not have to program anything, because Simulink libraries contain models of integrators, amplifiers and adders. Analytical solution of ODE may be obtained using `dsolve` command from *Symbolic Math Toolbox* - also without need for programming.

MATLAB uses ODE Suite algorithms to get numerical solution of ODE. Algorithms denoted in short as `odeXX` are represented by the functions listed below (the solvers): `ode45, ode113, ode15s, ode23s, ode23t, ode23tb, ode15i`. Additional 8 algorithms are used in Simulink for fix step simulation: ode1 (Euler) to ode8 (Dormánd-Prince RK8 formula).

Tips, tricks and examples of common mistakes made by students and some unconventional ways of using ODE solvers will conclude this presentation.

3.20
Finite Axiomatization Problem for Finite Logical Matrices

Katarzyna Pałasińska

A *logical matrix* is a pair $\mathfrak{M}$ consisting of an algebraic structure and a subset of the underlying set of this structure. The elements of the subset are called *designated values* of the matrix $\mathfrak{M}$. *Tautologies* of $\mathfrak{M}$ are defined as those terms that take a designated value under any valuation into $\mathfrak{M}$. For example, tautologies of the classical propositional logic are defined as the tautologies of the two-element Boolean matrix.

The *finite axiomatization problem* asks if for a given finite matrix $\mathfrak{M}$ there exists a finite set of basic laws (i.e., tautologies and rules) that, together with the substitution rule, allow to deduce all the tautologies of $\mathfrak{M}$. If the answer is positive, the matrix is called *finitely axiomatizable*. It is known that all two-element matrices are finitely axiomatizable. On the other hand there have been found some quite simple examples of three-element non-finitely axiomatizable matrices.

The problem whether finite axiomatizability is independent of the choice of basic operations has been stated over 20 years ago. In case of two-element

matrices as well as in case of matrices defining *algebraizable* logics the answer is "yes." We present some further examples for which the answer is positive. In general case the question remains open.

3.21
Analytic Manifolds as Locally Definable Spaces

Artur Piękosz

A **generalized topological space** is a triple (X, Op_X, Cov_X), where X is any set, $Op_X \subseteq \mathcal{P}(X)$, and $Cov_X \subseteq \mathcal{P}(Op_X)$, such that the following axioms are satisfied:
(**fin**) if $\mathcal{U} \in Fin(Op_X)$, then $\bigcup \mathcal{U}, \bigcap \mathcal{U} \in Op_X$, $\mathcal{U} \in Cov_X$,
(**stab**) if $V \in Op_X$, $\mathcal{U} \in Cov_X$, then $V \underline{\cap} \mathcal{U} \in Cov_X$,
(**trans**) if $\Phi \in \mathcal{P}(Cov_X), \underline{\bigcup} \Phi \in Cov_X$, then $\bigcup \Phi \in Cov_X$,
(**sat**) if $\mathcal{U} \in Cov_X, \mathcal{V} \in \overline{\mathcal{P}}(Op_X)$, $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, then $\mathcal{V} \in Cov_X$,
(**reg**) if $W \in \mathcal{P}(X), \mathcal{U} \in Cov_X$, $W \underline{\cap} \mathcal{U} \in \mathcal{P}(Op_X)$, then $W \cap (\bigcup \mathcal{U}) \in Op_X$.
Members of Op_M are **open sets**, members of Cov_M are **admissible** (open) **families**. Here $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$ means $\bigcup \mathcal{U} = \bigcup \mathcal{V}$ and $\mathcal{U}$ is a refinement of $\mathcal{V}$. The symbols $\underline{\cap}$, $\underline{\cup}$ denote family intersection and family union, respectively.

We consider the o-minimal structure $\mathbb{R}_{an}$ (i. e. the ordered field of real numbers augmented with restricted analytic functions).

A **function sheaf over** $\mathbb{R}_{an}$ on a generalized topological space M is a sheaf of sets $\mathcal{F}$ (the sheaf property is assumed only for admissible families) such that for each $U \in Op(M)$ the set $\mathcal{F}(U) \subseteq \mathbb{R}^U$ and the restrictions of the sheaf are the set-theoretical restrictions of mappings. A **function space over** $\mathbb{R}_{an}$ is a pair $(M, \mathcal{O}_M)$ where M is a generalized topological space and $\mathcal{O}_M$ is a function sheaf over $\mathbb{R}_{an}$. A **morphism** of such spaces is a mapping $f : M \to N$ such that $f^{-1}(Cov_N) \subseteq Cov_M$ and $\mathcal{O}_N \circ f \subseteq \mathcal{O}_M$.

Each definable (=globally subanalytic) subset D of $\mathbb{R}^n_{an}$ is naturally a function space over $\mathbb{R}_{an}$. Define Op_D = relatively open definable subsets, Cov_D = essentially finite families from Op_D, and on each $O \in Op_D$ take the family $\mathcal{DC}(O)$ of all definable continuous $\mathbb{R}$-valued functions on O.

An **affine definable space** over $\mathbb{R}_{an}$ is a function space over $\mathbb{R}_{an}$ isomorphic to a definable subset of some $\mathbb{R}^n_{an}$. (Morphisms of affine definable spaces are given by continuous definable maps between definable subsets.) A **locally definable space** over $\mathbb{R}_{an}$ is a function space over $\mathbb{R}_{an}$ that has an admissible covering by affine definable open subspaces. Such a space is **partially complete** if all its closed definable sets are complete (=definably compact).

A **paracompact locally definable manifold** of dimension n over $\mathbb{R}_{an}$ is a Hausdorff locally definable space over $\mathbb{R}_{an}$ that has a locally finite covering by affine definable open subsets that are isomorphic to open balls in $\mathbb{R}^n$. If additionally the transition maps are (definable) C^k-diffeomorphisms ($k = 1, ..., \infty$), then we get **paracompact locally definable C^k-manifolds**.

Theorem 1. *Paracompact (in the topological sense) analytic manifolds of pure dimension n are in bijective correspondence with partially complete paracompact locally definable C^∞-manifolds over $\mathbb{R}_{an}$ of the same dimension. (Each kind of manifold induces the other.)*

3.22
Definitions of Monge-Ampère operators

Szymon Pliś

We will explain how to define the Monge-Ampère operator (as a regular Borel measure) for any convex function. We will show how to define the complex Monge-Ampère operator for plurisubharmonic functions. Then we will generalize this for J-plurisubharmonic functions on four dimensional almost complex manifolds.

3.23
The Marsden-Weinstein Reduction Structure of Integrable Dynamical Systems and a Generalized Exactly Solvable Quantum Superradiance Model

Anatolij Prykarpatski

An approach to describing nonlinear Lax type integrable dynamical systems of modern mathematical and theoretical physics, based on the Marsden-Weinstein reduction method on canonically symplectic manifolds with group symmetry, is proposed. Its natural relationship with the well known Adler-Kostant-Souriau-Berezin-Kirillov method and the associated R-matrix approach is analyzed. A new generalized exactly solvable spatially one-dimensional

quantum superradiance model, describing a charged fermionic medium interacting with external electromagnetic field, is suggested. The Lax type operator spectral problem is presented, the related R-structure is calculated. The Hamilton operator renormalization procedure subject to a physically stable vacuum is described, the quantum excitations and quantum solitons, related with the thermodynamical equilibrity of the model, are discussed.

3.24
Density estimation for generalized skew-elliptical distributions

Jan Pudełko

We consider the problem of estimation of probability density function for generalized skew-elliptical distributions (GSE). Generalized skew-elliptical distributions have been introdused by Genton and Loperfido [1]. Such distributions occur in situations where the random sample from whole population is not available and we observe only the sample based on certain criterion. A p-dimentional generalized skew-elliptical distribution is a distribution with density o the form

$$f(\mathbf{x}) = 2|\mathbf{\Sigma}|^{-1/2} g(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{x}-\xi))\pi(\mathbf{\Sigma}^{-1/2}(\mathbf{x}-\xi)), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^p,$$

where g is the p.d.f. of a known spherical distribution, ξ is the location parameter, $\mathbf{\Sigma}^{-1/2}$ is the Cholesky decomposition of the inverse of the positive definite scale matrix $\mathbf{\Sigma}$ (i.e. $(\mathbf{\Sigma}^{-1/2})^T\mathbf{\Sigma}^{-1/2} = \mathbf{\Sigma}^{-1}$) and π is the (unknown) skewing fuction such that $\pi : \mathbb{R}^p \to [0,1]$ and $\pi(\mathbf{x}) + \pi(-\mathbf{x}) = 1$. Ma et al. [2] considered estimation of finite dimentional parameters of GSE distributions (i.e. ξ and $\mathbf{\Sigma}$). We present some results on estimation of the density function g by the method of sieves (see for instance [3]).

References

[1] Genton, M.G.; Loperfido, N.M.R.; *Generalized skew-elliptical distributions and their quadratic forms.* Ann. Inst. Statist. Math. 57 (2005), no. 2, 389–401.

[2] Ma, Y.; Genton, M.G.; Tsiatis, A.A.; *Locally eficient semiparametric estimators for generalized skew-elliptical distributions.* J. Amer. Statist. Assoc. **100** (2005), no. 471, 980–989.

[3] Shen, X.; *On methods of sieves and penalization.* Ann. Statist. **25** (1997), no. 6, 2555–2591. 62G05 (62F12)

3.25

Kernel density estimation and its application to data analysis

Jądrowa estymacja gęstości i jej zastosowania w analizie danych

Maria Samborska

W referacie przedstawione zostaną estymatory jądrowe służące do wyznaczania funkcji gęstości rozkładu zmiennej losowej. Identyfikacja rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie pochodzącej z niego próby jest jednym z istotnych problemów współczesnej analizy danych. Postępujący wzrost mocy obliczeniowej komputerów przyczynił się do coraz większego zainteresowania metodami estymacji nieparametrycznej, które zazwyczaj wiążą się z przeprowadzeniem złożonych obliczeń, ale w przeciwieństwie do metod estymacji parametrycznej nie wymagają czynienia jakichkolwiek założeń dotyczących typu badanego rozkładu. Jednym z najpopularniejszych estymatorów nieparametrycznych są estymatory jądrowe. W referacie nakreślona zostanie konstrukcja tych estymatorów z uwzględnieniem wyboru typu jądra oraz metod doboru wartości parametru wygładzania. Omówione zostaną zalety i wady tej metody oraz zaprezentowane zostaną przykłady ich zastosowań.

Słowa kluczowe: estymacja nieparametryczna, estymatory jądrowe, analiza danych

3.26

Existence and Uniqueness of the Solutions of Boundary Value Problem for Functional Differential Equations of Second Order

Lidia Skóra

The aim of the paper is to present results on the existence and the uniqueness of the solutions of the boundary value problem for functional differential equations of second order contained in [1].

Consider the following problem:

$$x''(t) = f(t, x_t), \quad t \in J = [0, T], T > 0, \tag{1}$$

$$x_0 = \phi, \quad x'(T) = \beta x'(0), \beta > 1, \tag{2}$$

where $f : J \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ are given functions, $\tau > 0$. For any function $x \in C([-\tau, T], \mathbb{R})$ and any $t \in J$, we let x_t denote the element of $C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ defined by

$$x_t(s) = x(t + s), \qquad s \in [-\tau, 0].$$

The supremum norm of $\phi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ is defined by

$$\|\phi\|_0 = \sup_{-\tau \le s \le 0} |\phi(s)|.$$

Denote $C^\star = C([-\tau, T], \mathbb{R}) \cap C^2([0, T], \mathbb{R})$.

A solution of the problem (1)-(2) we mean in the classical sense. Function $x \in C^\star$ is a solution of (1)-(2) if and only if x is a solution of some integral equation. First we transform the problem (1)-(2) into fixed point problem. Then using the Banach fixed point theorem we obtain the main result on the existence and uniqueness of the solutions of the problem (1)-(2):

THEOREM ([1]). *Assume that* $f \in C(J \times C([-\tau, 0], \mathbb{R}), \mathbb{R})$ *and there exists*
$m \in L^1([0, T], \mathbb{R}_+)$ *such that*

$$|f(t, u) - f(t, \bar{u})| \le m(t)\|u - \bar{u}\|_0$$

for all $t \in [0,T], u, \bar{u} \in C([-\tau,0],\mathbb{R})$ *and*

$$M(T) < \frac{\ln \beta}{T},$$

where $M(t) = \int_0^t m(r)dr$. *Then the problem (1)-(2) has a unique solution* $x \in C^\star$.

Finally, we give some examples to illustrate the applications of the above theorem.

For second order functional differential equations we refer to the papers [1], [2] and the references therein.

References

[1] L. Skóra, *Boundary value problems for second order delay differential equations,* Opuscula Mathematicae, Vol. **32**, No **3**, (2012),551-558.

[2] L. Skóra, *Functional differential equations of second order,* Technical Transactions, Issue **8(106)**, (2009),64-75.

3.27

Some remarks on matrix theory in compressed sensing

Teoria macierzy w oszczędnym próbkowaniu – kilka uwag

Marcin Skrzyński

Istotną rolę w matematycznej teorii oszczędnego próbkowania (*Compressed Sensing*) grają dwa pojęcia związane z jądrem macierzy pomiaru: spark (Donoho i Elad, 2003) oraz NSP (*Null Space Property*; Cohen, Dahmen i DeVore, 2009). Za pomocą tych pojęć formułuje się podstawowe twierdzenia o jednoznaczności i efektywności rekonstrukcji sygnału rzadkiego. W referacie, po (bardzo) krótkim wprowadzeniu do matematycznej teorii oszczędnego próbkowania, przedstawimy kilka spostrzeżeń i przykładów dotyczących własności wymienionych powyżej dwóch pojęć oraz związków między tymi pojęciami.

References

[1] A. Cohen, W. Dahmen, and R. DeVore, Compressed sensing and best k-term approximation, *J. Am. Math. Soc.* **22**, No. 1: 211–231 (2009).

[2] D. L. Donoho and M. Elad, Optimally sparse representation in general (nonorthogonal) dictionaries via ℓ^1 minimization, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **100**, No. 5: 2197–2202 (2003).

[3] M. Fornasier and H. Rauhut, Compressive Sensing, in: O. Scherzer (ed.), *Handbook of Mathematical Methods in Imaging*, Springer, 2011 (187–228).

[4] M. Matan i M. Skrzyński, *O podstawach matematycznych i zastosowaniach oszczędnego próbkowania*, referat na XLI Ogólnopolskiej Konferencji Zastosowań Matematyki, Zakopane-Kościelisko, wrzesień 2012.

3.28

Neyman smooth test: omnibus and powerful tool for modern statistical inference

Bartosz Stawiarski

The smooth goodness-of-fit test, introduced by Neyman (1937) is presented. In the pioneer years largely unnoticed, the test attracted closer attention only in 1950s, whereas its huge statistical potential was discovered by successive papers of: Thomas and Pierce (1979), Rayner and Best (1989) and extensive research by Inglot, Kallenberg and Ledwina in their numerous papers throughout 1990s. General idea and test construction for simple and composite (i.e. with nuisance parameters) hypothesis is presented. Many authors' vast theoretical and computational research confirms the test's omnibus character shown by its high power against wide range of alternatives. The Neyman test not only competes well with classical normality tests (Kolmogorov-Smirnov, Shapiro-Wilk), but mostly substantially outperforms other tests in general H_0 case. The issue of data-driven version of the test is also addressed. Moreover its application in dependent sequences framework (ARMA, GARCH) is shown, which seems vital for improving statistical inference e.g. in econometrics.

3.29

Convergence in measure through compactifications

Eliza Wajch

In memory of Stanisław Łojasiewicz [1926-2002]

In a convenient interpretation of ZFC, let us consider a metrizable space X with its topology τ, a measure space $(E, \mathfrak{M}, \mu)$ with an infinite σ- finite measure μ on a $\sigma-$ field $\mathfrak{M}$ of subsets of a set E, and the collection $\mathcal{M}(E, X)$ of all functions $f : E \to X$ such that $f^{-1}(U) \in \mathfrak{M}$ for each $U \in \tau$ and $\mu[f^{-1}(X \setminus B_f)] = 0$ for some separable Borel subspace B_f of X. As usual, for a Hausdorff compactification αX of X, let $C_\alpha(X)$ be the collection of all those continuous real functions on X that are continuously extendable over αX. In particular, when βX is the Čech-Stone compactification of X, then $C_\beta(X)$ is the collection of all bounded continuous real functions on X. When d is a compatible metric on X, then $u_d X$ is the minimum uniform compactification of X discovered by R. Grant Woods not later than in 1994. For a sequence $\langle f_n \rangle$ of functions from $\mathcal{M}(E, X)$ and for a function $f \in \mathcal{M}(E, X)$, the following concepts are taken into consideration: (1) the sequence $\langle f_n \rangle$ is d-convergent in μ to f if, for each positive real number ϵ, the sequence $\langle \mu(\{t \in E : d(f_n(t), f(t)) \geq \epsilon\}) \rangle$ is convergent in $\mathbb{R}$ to zero; (2) the sequence $\langle f_n \rangle$ is $C_\alpha(X)$-convergent in μ to f if, for each $\phi \in C_\alpha(X)$, the sequence $\langle \phi \circ f_n \rangle$ converges globally in μ to $\phi \circ f$. It occurs that if d is a totally bounded compatible metric on X, then d -convergence in μ is equivalent to $C_{u_d}(X)$-convergence in μ. It is still unknown whether $C_{u_d}(X)$-convergence in μ must imply d-convergence in μ when the metric d is not totally bounded. If αX is a metrizable compactification of X, while γX is a Hausdorff compactification of X such that $C_\alpha(X)$-convergence in μ implies $C_\gamma(X)$-convergence in μ, then γX is also metrizable and, moreover, $\gamma X \leq \alpha X$. In consequence, the space X is compact if and only if there exists a compatible totally bounded metric d on X such that d-convergence in μ implies $C_\beta(X)$-convergence in μ. Investigations in ZF of the objects mentioned above can be very hard and they need not lead to identical results as the ones obtained in ZFC.

3.30

Modelling of vibrations of beams and plates with piezoelectric actuators

Modelowanie drgań belek i płyt z aktuatorami piezoelektrycznymi

Margareta Wiciak

Odkryte w 1880 r. przez Pierre'a i Jacques'a Curie zjawisko piezoelektryczne polega na pojawieniu się ładunków elektrycznych na powierzchni kryształów pod wpływem naprężeń mechanicznych. Później zaobserwowano również zjawisko odwrotne, polegające na zmianie wymiarów kryształu pod wpływem przyłożonego pola elektrycznego, czyli tzw. odwrotny efekt piezoeletryczny. Zjawiska te szybko zyskały liczne zastosowania w technice. W latach 50-tych XX wieku rozpoczęto badania nad zastosowaniem elementów piezoelektrycznych w aktywnych metodach redukcji drgań i hałasu oraz w diagnostyce maszyn i urządzeń, [1].

W referacie będziemy rozważać strukturę jedno lub dwuwymiarową z aktuatorem piezoelektrycznym. Aktuator taki składa się z dwóch elementów piezoelektrycznych naklejonych symetrycznie po obu stronach belki (płyty). Odpowiednio dobrane napięcie przyłożone do przeciwległych powierzchni aktuatora powoduje, że doznaje on odkształcenia, co może zmienić charakterystkę całego układu.

Rozważmy klasyczne równanie drgań giętnych belki (płyty)

$$\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + D\Delta^2 w = f, \tag{2}$$

gdzie $w : [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ($n = 1$ dla równania belki i $n = 2$ dla równania płyty), $w = w(t, x)$ oznacza przemieszczenie punktu $x \in \mathbb{R}^n$ belki (płyty) w chwili t, f – wymuszenie, stała D jest walcową sztywnością belki (płyty) na zginanie, μ – gęstością belki (płyty) na jednostkę długości (powierzchni).

W przypadku jednowymiarowym rozważmy dodatkowo aktuator piezoelektryczny naklejony na belce na odcinku $[x_1, x_2]$ i zasilany zmiennym napięciem V. Pochodzące od aktuatora wymuszenie - dodatkowy składnik f_{pe} po prawej stronie równania (2), jest postaci

$$\frac{d^2}{dx^2} m_x = C_0 \epsilon_{pe} (\delta'_{x_1} - \delta'_{x_2}), \tag{3}$$

gdzie $C_0 = E_pIK$, E_pI oznacza sztywność belki na zginanie, K jest stałą geometryczną zależną od własności belki i elementu piezoelektrycznego, ϵ_{pe} jest funkcją przyłożonego napięcia V i własności piezoelektrycznych aktuatora. δ_{x_i} oznacza dystrybucję delta Diraca, $\delta_{x_i}\varphi = \varphi(x_i)$ dla funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, a pochodne są rozumiane w sensie dystrybucyjnym.

W przypadku dwuwymiarowym możemy rozpatrywać aktuatory piezoelektryczne różnego kształtu naklejone na płytę. Co więcej, okazuje, że nie tylko przyłożone napięcie, położenie aktuatora, ale również jego kształt silnie wpływa na jego zdolność redukcji drgań układu.

Najprościej modeluje się aktuator prostokątny $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2\}$. W tej sytuacji momenty wewnętrzne indukowane przez aktuator można zapisać wzorem,

$$m_x = m_y = C_0\epsilon_{pe}\left([H_{x_1} - H_{x_2}] \otimes [H_{y_1} - H_{y_2}]\right), \tag{4}$$

[1], gdzie H_{x_i} jest funkcją Heaviside'a, $[H_{x_i}]$ oznacza dystrybucję regularną generowaną przez funkcję H_{x_i}, tzn.

$$[H_{x_i}](\varphi) = \int_{\mathbb{R}} H_{x_i}(x)\varphi(x)dx = \int_{x_i}^{\infty} \varphi(x)dx \quad \text{dla } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),$$

zaś $\otimes$ oznacza iloczyn tensorowy dytrybucji,

$$(S \otimes T)(\varphi) = S(x \mapsto T(\varphi(x,\cdot)))$$

dla $T, S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, i konsekwentnie wymuszenie pochodzące od rozważanego aktuatora wyraża się

$$f_{pe} = \frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2}. \tag{5}$$

W przypadku aktuatora o dowolnym kształcie, np. trójkątnym, równoległobocznym, czy kołowym, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \leq x \leq x_2, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$, gdzie f_1, f_2 są klasy $\mathcal{C}^\infty$, momenty wewnętrzne wygodnie jest również opisać w podobnej postaci jak (4), [2, 4, 3, 6]

$$m_x = m_y = C_0\epsilon_{pe}\left([H_{x_1} - H_{x_2}] \otimes [H_{f_1(x)} - H_{f_2(x)}]\right). \tag{6}$$

Zauważmy jednak, że tym wypadku mamy do czynienia z iloczynem dystrybucji i odwzorowania o wartościach w przestrzeni dystrybucji, $\mathbb{R} \ni x \mapsto [H_{f_i(x)}] \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Aby taki uogólniony iloczyn dystrybucji $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ i odwzorowania $T : \mathbb{R} \ni x \mapsto T(x) \in \mathbb{D}'(\mathbb{R})$ miał sens należy założyć, że odwzorowanie T jest klasy C^∞, tzn. odwzorowanie $\mathbb{R} \ni x \mapsto T(x)\varphi \in \mathbb{R}$ jest

klasy C^∞ dla każdej funkcji próbnej $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Sprawdza się, że iloczyn w (6) ma sens, co więcej jest dystrybucją temperowaną. Pozwala to na podanie analitycznego wzoru na rozwiązanie zagadnienia Cauchy'ego skojarzonego z równaniem (2) z dodatkowym składnikiem f_{pe} po prawej stronie równania, postaci (3), (5, 4) lub (5, 6). Ponadto warunki brzegowe mogą być uwzględnione w rozważanym problemie, jako dodatkowy składnik po prawej stronie (2). Rozwiązanie rozważanego problemu uzyskujemy w klasie funkcji absolutnie ciągłych o wartościach dystrybucyjnych, $w : [0, +\infty) \to \mathcal{D}'_{temp}(\mathbb{R}^2)$, [5, 6].

Bibliografia

[1] E.K. Dimitriadis, C.R. Fuller, C.A. Rogers, *Piezoelectric Actuators for Distributed Vibration Excitation of Thin Plates,* Journal of Vibration and Acoustics, 1991, Vol. 113, pp. 100-107.

[2] P. Gardonio and S.J. Elliott,*Smart panels with velocity feedback control systems using triangularly shaped strain actuators,* Journal of the Acoustical Society of America, **117**(4), 2046-2064 (2005).

[3] E.M. Sekouri, Y.R. Hu, A.D. Ngo, *Modeling of a circular plate with piezoelectric actuators,* Mechatronics **14**, 1007-1020 (2004).

[4] J.M Sullivan, J.E. Hubbard, Jr., S.E. Burke, *Modeling approach for two-dimensional distributed transducers of arbitrary spatial distribution,* J. Acoust. Soc. Am 99 (5), 1996, pp. 2965-2974.

[5] M. Wiciak, *A solution of the Cauchy problem in the class of absolutely continuous distribution valued functions,* Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica, Issue 42 (2004), pp. 31-53.

[6] M. Wiciak, *Analytical solution of the problem of vibration of plates with piezoelectric actuators with arbitrary shape in distribution formulation,* Acta Phys. Polon. A, **121** (2012), 142–147.

4 Appendix

4.1

On the classical and generalized solutions for parabolic equation in the infinite dimensional space

O klasycznych i uogólnionych rozwiązaniach dla równania parabolicznego w przestrzeni nieskończenie wymiarowej

Jan Koroński